Colegiul Național „Gheorghe Lazăr” Sibiu

Brodețchi Mircea

DIVIZIBILITATE – NUMERE PRIME

Auxiliar curricular - util în pregătirea pentru olimpiade și concursuri

Divizibilitatea şi, în mod special, *numerele prime* se constituie ca teme aritmetice cu probleme deosebit de interesante, des întâlnite la olimpiadele și concursurile școlare. De aceea, consider util pentru elevi un material care aduce în atenție această problematică prin aplicații selectate și grupate după metode de rezolvare, noţiuni sau algoritmi utilizați. Problemele sunt recomandate atât pentru gimnaziu (notate G) cât și pentru liceu (notate L).

Există aici atât probleme simple, de aplicare directă a teoriei cât şi probleme pretenţioase ce necesită un efort de gândire mai mare. Toate au atașată o rezolvare completă sau indicații de abordare. Problemele au fost selectate dintre cele propuse la olimpiadele şcolare, din ediții mai vechi ale *Gazetei matematice* şi din culegeri de probleme de aritmetică.

Autorul

Noţiunea de număr prim

1. (G) *a) Să se arate că 1993 este număr prim.*
b) Care dintre numerele 1993^{1994} şi 1994^{1993} are mai mulţi divizori ?
(O.L. Călăraşi, 1993)

Rezolvare şi observaţii. Punctul a) al problemei poate fi utilizat la clasă, el presupunând aplicarea directă a algoritmului de verificare dacă un număr este sau nu prim.

b) Dacă clasa este de nivel mediu sau scăzut, la acest punct se poate formula ca cerinţă ajutătoare descompunerea în factori primi a numărului 1994.

Numărul 1993^{1994} are ca divizori pe: 1, 1993, 1993^2, . . . , 1993^{1994} adică 1995 divizori. Numărul $1994^{1993} = 2^{1993} \cdot 997^{1993}$ are mult mai mulţi divizori.

Pentru a fi convinşi se pot enumera divizorii:

$$\begin{array}{lllll} 1, & 2, & 2^2, & \ldots\ldots\ldots, & 2^{1993}, \\ 997, & 997\cdot 2, & 997\cdot 2^2, & \ldots\ldots\ldots, & 997\cdot 2^{1993}, \\ \ldots & & & & \\ 997^{1993}, & 997^{1993}\cdot 2, & 997^{1993}\cdot 2^2, & \ldots\ldots\ldots, & 997^{1993}\cdot 2^{1993}. \end{array}$$

2. (G) *Suma a 6 numere întregi consecutive este un număr prim. Să se afle cele 6 numere.*

Rezolvare. Fie $S = (n - 2) + (n - 1) + n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 6n + 3$ suma celor saşe numere consecutive. Dacă $S = 3(2n + 1)$ este număr prim. Atunci $2n + 1 = 1$ iar $n = 0$. Deci numerele sunt: -2, -1, 0, 1, 2, 3.

3. (G) *Să se determine numerele prime de trei cifre, ştiind că produsul cifrelor sale este 252.*

Rezolvare. Deoarece $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ atunci numărul prim ar putea fi format din cifrele: 4, 9 şi 7 sau 6, 6 şi 7. Pentru fiecare dintre numerele formate cu aceste cifre se verifică dacă este sau nu număr prim.

4. (G) *Să se determine numerele prime de trei cifre, ştiind că produsul cifrelor sale este 441.*

Rezolvare. Asemănătoare cu cea a problemei anterioare.

5. (G) *Să se determine cel mai mic număr prim de patru cifre.*

Rezolvare. Se justifică pe baza criteriilor de divizibilitate de ce numerele 1000, 1002, 1004, 1005, 1006, 1008 nu sunt prime şi apoi se verifică pe rând numerele 1003, 1007, 1009. Acesta din urmă se va dovedi a fi prim.

6. (G) *Se dă mulţimea: $A = \{1, 3, 5\}$. Câte numere prime de forma $\overline{aab}$, $\overline{aba}$ se pot forma cu elementele acestei mulţimi ?*

Rezolvare. Se verifică dacă numerele 113, 331, 553, 551, 131, 151, 313, 353, sunt prime prin împărţiri la toate numerele prime până când împărţitorul devine mai mare decât câtul.

Observaţie. Problemele **2**, **3**, **4**, **5, 6** presupun doar cunoaşterea noţiunii de număr

prim şi a modului de aflare prin împărţiri succesive la numere prime (mai mici decât $\sqrt{n}$) dacă numărul *n* dat este sau nu prim. Astfel, datorită gradului scăzut de dificultate pot fi utilizate la clasă, în etapa de fixare, imediat următoare celei de predare a cunoştiinţelor.

Dacă se doreşte o complicare a sarcinii de lucru li se poate cere elevilor să compună ei înşişi o problemă similară problemelor **3**, **4**, **5** sau **6**.

7. (G, L) *Se dă numărul **A**= 100 . . . 01, numărul zerourilor fiind 100. Să se demontreze că acest număr nu este prim.*

(I. Anastasiu – G. M. nr. 2/1981)

Rezolvare. $\mathbf{A} = 10^{101} + 1 = 10^{101} + 1^{101} = (10 + 1)(10^{100} - 10^{99} + \ldots + 1)$. Deci numărul dat este divizibil cu 11.

8. (G) *Să se găsească toate numerele prime care sunt mai mici cu o unitate decât un cub perfect.*

(M. Lascu – G.M. nr. 9/1985)

Rezolvare. Numerele întregi pozitive mai mici cu o unitate decât un cub perfect sunt de forma $n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$ unde $n \in \mathbf{N}$, $n>1$. Pentru a

putea fi prime, ţinând cont că $n^2 + n + 1 > 1$ pentru $n > 1$, este necesar ca $n - 1 = 1$ adică $n = 2$ şi atunci $n^3 - 1 = 7$

9. (G) *Suma dintre un număr prim şi un număr impar este 2003. Aflaţi cele două numere.*

Rezolvare. Numărul prim trebuie să fie par ca suma să poată fi impară. Deci, numărul prim este 2 iar numărul impar 2001.

10. (G*) *Arătaţi că nu există nici un număr prim astfel încât suma dintre el şi $n^2 + n$ să fie 1984, unde $n \in \mathbf{N}$.*

(N. Tălău – G.M. nr 9/1984)

Rezolvare. $n^2 + n = n(n + 1)$ este număr par pentru $n \in \mathbf{N}^*$ iar dacă suma dintre acest număr şi un număr prim ar fi 1984 atunci numărul prim ar trebui să fie şi el număr par. Deci numărul prim ar putea fi doar 2. În acest caz, obţinem că $1982 = 2 \cdot 991$ ar fi produsul a două numere naturale consecutive ceea ce este fals.

11.(G) *Să se arate că un număr de patru cifre, având cifrele identice două câte două, nu poate fi prim.*

(D. Acu - G.M. nr 7/1979)

Rezolvare. Numerele $\overline{aabb} = 11(100a + b) = M_{11}$; $\overline{abab} = 101(10a + b) = M_{101}$, $\overline{abba} = 11(91a + 10b) = M_{11}$ sunt compuse.

Numere prime ce verifică anumite condiţii date

12.(G) *Aflaţi numerele prime a, b, c ştiind că $2a + 3b + c = 21$. Se cer toate soluţiile.*

(O. J. Suceava, 1993)

Rezolvare. Deoarece $2a$ este număr par iar suma este număr impar rezultă că suma $3b + c$ este număr impar. Deci unul dintre termenii săi este par iar celălalt impar. Se disting astfel două cazuri:

Dacă c este număr par atunci $c = 2$ iar $2a + 3b = 19$. În continuare putem avea situaţiile: $a = 2$ şi $b = 5$ sau $a = 5$ şi $b = 3$

Dacă $3b$ este număr par atunci $b = 2$ iar $2a + c = 15$. Apoi obţinem $a = 2$, $c = 11$, sau $a = 5$ şi $c = 5$.

13.(G) *Determinaţi numerele naturale a, b, k astfel încât* $\overline{ab}$ *şi* $\overline{ba}$ *să fie prime iar* $a + b = k^2$

(O. J. Bistriţa Năsăud, 1994)

Rezolvare. Dintre numerele prime de două cifre se aleg acelea care îndeplinesc condiţia ca şi răsturnatul lor să fie număr prim. Acestea sunt 11, 13, 17, 37, 79. Dintre acestea îndeplinesc condiţia ca suma cifrelor să fie un pătrat perfect doar numărul 13 şi 79. Deci $a=1$, $b = 3$, $k = 2$ sau $a = 7$, $b = 9$, $k = 4$.

14.(G) *Să se găsească două numere prime astfel ca suma lor să fie un număr natural de forma* $\overline{aa}$.

(O. L. Olt, 1992)

Rezolvare. Având în faţă tabloul numerelor prime mai mici decât 100, elevii le vor grupa câte două astfel încât suma lor să fie de forma cerută. Obţinem varianrtele: 2 şi 53; 13 şi 31; 17 şi 71.

Observaţie. Problemele **13** şi **14** pot fi rezolvate după ce s-a întocmit *Ciurul lui Eratostene* pentru numerele naturale mai mici decât 100 şi se pot rezolva cu întreaga clasă, ele presupunând doar simpla verificare a îndeplinirii condiţiilor date.

15.(G) *Determinaţi numerele prime a şi b ştiind că* $a - b = p^n$ *; unde p este un număr prim,* $n \in \mathbf{N}$ *şi că* $a + b = 150$.

Rezolvare. Adunând membru cu membru cele două egalităţi obţinem: $2a = 150 + p^n$. Deducem că p este un număr par dar fiind şi prim, obţinem $p = 2$ iar $a = 75 + 2^{n-1}$. Cum $a<150$, obţinem $n<8$.
Analizând toate cazurile pentru $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ obţinem:

$$\begin{cases} a = 79 \\ b = 71 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 83 \\ b = 67 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 107 \\ b = 43 \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 139 \\ b = 11 \end{cases}.$$

16.(G) *Să se determine numerele prime p pentru care numerele 24p + 1 sunt pătrate perfecte.*

Rezolvare. Deoarece $24p + 1$ este număr impar, $24p + 1 = (2k + 1)^2$. Deducem că $6p = k(k + 1)$. Deci $6p$ trebuie să fie produsul a două numere naturale consecutive. Având în vedere că $6p$ se poate descompune în produs de doi factori doar în următoarele trei moduri: $2p \cdot 3$, $3p \cdot 2$ sau $6 \cdot p$, obţinem $p = 2$, $p = 5$ sau $p = 7$. Pentru orice $p>7$ factorii nu sunt consecutivi.

17. (G) *Să se găsească că numărul prim* $\overline{abc}$, *ştiind că* $\overline{cba}$ *şi* $\overline{bca}$ *sunt numere prime iar* $a + b + c = \overline{ac}$.

(Ş. Anastase – G. M. nr. 6/1982)

Rezolvare. Din $a + b + c = \overline{ac}$ obţinem $a + b + c = 10a + c$, adică $b = 9a$. Deci $a = 1$ iar $b = 9$. Pentru c rămân variantele $c \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ dintre care doar pentru $c = 7$ se obţin numerele $\overline{abc}$, $\overline{cba}$ şi $\overline{bca}$ prime.

18.(G) *Să se găsească a, b, c numerele naturale prime astfel ca* $a^3b^2c^2 + a^2b^2c + a = 1982$.

(M. Lucu – G. M. nr. 8/1982)

Rezolvare. Din relaţia dată obţinem $a(a^2b^2c^2 + ab^2c + 1) = 1982$ şi cum paranteza e mai mare decât 2, deducem $a = 2$. Apoi $a^2b^2c^2 + ab^2c + 1 = 991$ de unde $b^2c\,(ac + b) = 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Deducem $b = 3$ şi $c = 5$.

19.(G,L) *Să se afle numerele prime care se pot reprezenta atât ca sumă cât şi ca diferenţă de două numere prime.*

Rezolvare. Fie p un număr prim care se reprezintă ca sumă şi ca diferenţă de două numere prime. Evident $p>2$ şi deci p este impar şi atunci unul din termenii sumei şi ai diferenţei trebuie să fie 2. Fie $p = q + 2 = r - 2$ cu p şi r prime. Cum $r = p + 2$ şi $q = p - 2$ rezultă că trebuie ca $p - 2$, p, $p + 2$ să fie simultan prime. Fiindcă dintre trei numere consecutive impare unul este divizibil cu 3, singurul triplet care convine este 3, 5, 7. Deci $p = 5$.

20.(L) *Dacă un număr prim este de forma* $2^n + 1$, *atunci* $n = 0$ *sau* $n = 2^k$ *cu* $k = 0, 1, 2, ...$

Rezolvare. Dacă n este număr impar atunci $2^n + 1$ se divide prin $2 + 1 = 3$. Dacă n este par el se poate scrie $n = 2^k \cdot m$; unde $m \geq 1$ este impar sau $n = 0$. Pentru $m \geq 1$ numărul $2^n + 1 = 2^{2^k \cdot m} + 1$ se divide prin $2^{2^k} + 1$, deci este compus. Rămâne $m = 1$, adică $n = 2^k$.

21.(L) *Dacă numărul* $a^\alpha + b^\beta$ *unde* $(a,b) = 1$ *este prim, atunci* $(\alpha,\beta) = 1$ *sau* $(\alpha,\beta) = 2^k$.

Rezolvare. Fie $(\alpha,\beta) = d$ cu $\alpha = dm$, $\beta = dn$, $(m,n) = 1$. Pentru $d > 1$ impar, numărul $a^\alpha + b^\beta = (a^m)^d + (b^n)^d$ se divide prin $a^m + b^n$. Pentru d par putem scrie $d = 2^k q$, cu q număr impar, $q \geq 1$. Pentru $q \geq 1$ numărul $a^\alpha + b^\beta = (a^{m \cdot 2^k})^q + (b^{n \cdot 2^k})^q$ se divide prin $a^{m \cdot 2^k} + b^{n \cdot 2^k}$, deci este compus. Rămâne $q = 1$ adică $d = 2^k$ şi astfel $(\alpha,\beta) = 2^k$.

22.(L) *Dacă* $2^n - 1$ *este prim, atunci n este prim.*

Rezolvare. Presupunem prin absurd că n este număr compus, $n = ab$ cu $a > 1$, $b > 1$. Obţinem $2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = \left(2^a\right)^b - 1$ care se divide prin $2^a - 1 \neq 1$, contradicţie.

Numere simultan prime

23. (G) *Să se afle numerele naturale* n *pentru care fiecare din numerele:* $n + 1, n + 3, n + 7, n + 9, n + 15$ *este număr prim.*

(O. L. Argeş, 1994)

Rezolvare. Se analizează pe rând cazurile $n \in \{5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4\}$, $k \in \mathbf{N}$. Singurul caz în care se obţin cinci numere prime de forma dată este $n = 5k + 4$ pentru $k = 0$, adică $n = 4$. Se obţin numere prime 5, 7, 11, 13, 19.

24.(G) *Fie numerele n, n + 2, n + 6, n + 14, n + 18, cu* $n \in \mathbf{N}^*$. *Găsiţi un număr n astfel încât cele cinci numere să fie simultan prime.*

(O. J. Neamţ, 1994)

Rezolvare. Se rezolvă ca şi problema **23**.

25.(G) *Dacă numerele naturale n, n + 1, n + 3 sunt prime atunci numărul* $n^{n+3} + (n + 1)^n + (n + 3)^{n+1}$ *este prim?*

(O. J. Prahova, 1992)

Rezolvare. Numerele n şi $n + 1$ fiind prime rezultă $n = 2$, $n + 1 = 3$, $n + 3 = 5$. Calculând $n^{n+3} + (n + 1)^n + (n + 3)^{n+1}$ obţinem $2^5 + 3^2 + 5^3 = 166$ care nu este număr prim.

26.(L) *Să se determine numerele naturale n pentru care* $2^n - 1$ *şi* $2^n + 1$ *sunt simultan prime.*

Rezolvare. Combinând rezultatele problemelor **20** şi **22** deducem $n = 2$.

27.(G) *Să se găsească numerele naturale p astfel încât numerele p,* $p^2 + 4$, $p^2 + 6$ *să fie numere prime.*

(O. J. Galaţi, 1994)

Rezolvare. Evident p nu poate fi număr par. Dacă p se termină în 1 sau 9, atunci $p^2 + 4 \vdots 5$, iar dacă se termină în 3 sau 7 atunci $p^2 + 6 \vdots 5$. Rămâne că p se termină în cifra 5 şi fiind număr prim deducem $p = 5$.

28.(G) *Determinaţi numărul natural prim p pentru care* $p^2 + 4$ *şi* $p^2 + 8$ *sunt de asemenea numere prime.*

(G.M., nr. 4/1986)

Rezolvare. Analizăm cazurile $p \in \{3k; 3k + 1; 3k + 2\}$, $k \in \mathbf{N}^*$. Dacă $p = 3k + 1$, atunci $p^2 + 8 = M_3 + 1 + 8 = M_3$. Dacă $p = 3k + 2$, atunci $p^2 + 8 = M_3 + 4 + 8 = M_3$. Deci $p = 3k$ şi fiind număr prim obţinem $p = 3$ iar $p^2 + 8 = 17$ şi $p^2 + 4 = 13$.

29. (G) *Să se determine numerele prime p pentru care numerele p + 4, p + 24, $p^2 + 10$, $p^2 + 34$ sunt simultan prime.*

Rezolvare. Analizând cazurile $p \in \{7k, 7k + 1, 7k + 2, 7k + 3, 7k + 4, 7k + 5, 7k + 6\}$, $k \in \mathbf{N}^*$ şi raţionând ca şi la problema precedentă obţinem $p = 7$.

30.(G) *Să se arate că numerele p, $2p^2 - 3$, $2p^2 + 3$ sunt simultan prime numai pentru p = 5.*

Rezolvare. Pentru $p = 5$ obţinem numerele prime 5, 47, 53. Dacă p este un număr prim diferit de 5, atunci, $p \in \{5k + 1, 5k + 2, 5k + 3, 5k + 4\}$, $k \in \mathbf{N}^*$. Obţinem $p^2 = M_5 \pm 1$ şi deci $5 \mid 2p^2 - 3$ sau $5 \mid 2p^2 + 3$.

Numere prime între ele

31.(G) *Să se arate că numerele 10n + 3 şi 15n + 4 sunt prime între ele pentru orice număr natural n.*

(O. J. Neamţ, 1992)

Rezolvare. Fie d cel mai mare divizor comun al celor două numere. Atunci $d \mid 10n + 3$ şi $d \mid 15n + 4$. Deci $d \mid [3(10n + 3) - 2(15n + 4)]$ adică $d \mid 1$.

32.(G) *Să se arate că numerele 10n+ 53 şi 7n + 37 sunt prime între ele pentru orice număr natural n.*

Rezolvare. Se rezolvă la fel ca şi problema **31**.

33.(G) *Să se arate că fracţia $\frac{x+1}{2x+1}$ este ireductibilă oricare ar fi $x \in \mathbf{N}^*$.*

(O. J. Călăraşi, 1993)

Rezolvare. Fie d un divizor comun al numărătorului şi numitorului fracţiei date. Atunci $d \mid x + 1$ şi $d \mid 2x + 1$. Deci $d \mid [2(x+1) - (2x+1)]$ adică $d \mid 1$. Astfel, numitorul şi numărătorul fiind numere prime între ele fracţia este ireductibilă.

Observaţie. Problemele **31**, **32**, **33** sunt accesibile la clasă dacă elevii au rezolvat ăn ciclul primar sau în clasa a V – a probleme aritmetice cu metoda comparaţiei. La cercurile de matemetică li se poate propune elevilor să creeze ei astfel de probleme.

34. (G) *Să se demonstreze că* $\overline{3xy}$ *şi 137 sunt prime între ele, oricare ar fi cifrele* x *şi* y.

(G. Mărgineanu – G. M. nr. 5/1980)

Rezolvare. Numărul 137 este prim. Dar $2 \cdot 137 = 411$. Deci multiplii lui 137 nu pot fi de forma $\overline{3xy}$.

35.(G) *Câte numere relativ prime cu* 1979^{1980} *nu sunt prime cu 1979 ?*

(P. Simion – G. M. nr 1/1980)

Rezolvare. Numărul 1979 este număr prim. Atunci numerele mai mici decât 1979^{1980} care nu sunt prime cu 1979 vor fi toate puterile lui 1979 de la 1 la 1979, adică 1979, 1979^2, 1979^3, . . . , 1979^{1979}, adică 1979 de numere.

36.(G,L) *Să se afle* $k \in \mathbf{N}^*$ *pentru care* $8^k + 1$ *şi 585 sunt relativ prime*.

(A. Cindrea – G.M nr 8/1986)

Rezolvare. Se descompune 585 în factori primi: $585 = 3^2 \cdot 5 \cdot 13$. Se observă că $8^k + 1$ se divide prin $8 + 1$ dacă k este număr impar. Dacă $k = 4t + 2$ cu $t \in \mathbf{N}^*$, atunci ultima cifră a lui 8^k este $U(8^k) = 4$ iar $U(8^k + 1) = 5$ şi astfel numerele date vor avea ca divizor comun pe 5. Dacă $k = 4t$, cu $t \in \mathbf{N}^*$, atunci $8^k + 1 = 8^{4t} + 1 = 4096^t + 1 = (M_9+1)^t + 1 = (M_{13}+1)^t + 1$. Astfel, în această situaţie numărul nu se divide cu 9 sau cu 13 şi în plus nici cu 5 deoarece ultima sa cifră este 7. Deci, pentru $k = 4t$, $t \in \mathbf{N}^*$ numerele $8^k + 1$ şi 585 sunt prime între ele.

Descompunerea numerelor naturale în produs de numere prime

37.(G) *Aflaţi unu număr prim de trei cifre a cărui răsturnare este tot număr prim, ştiind că pătratul produsului cifrelor sale este 35721.*

(O. J. Hunedoara, 1994)

Rezolvare. Fie $\overline{abc}$ numărul prim căutat. Deci $(a \cdot b \cdot c)^2 = 35721 = (3 \cdot 7 \cdot 9)^2$. Ţinând cont că şi $\overline{cba}$ este număr prim, deducem că numărul căutat este 379.

38.(G) *Descompuneţi pe rând numerele 111, 1111, 11111, 111111, 1111111 în produs de numere prime.*

(G. M. nr 4/1986)

Rezolvare. Avem $111 = 3 \cdot 37$, $1111 = 11 \cdot 101$, $11111 = 41 \cdot 271$, ...

39. (G) *Se consideră următoarea descompunere în factori primi:* $\overline{aaa} = b \cdot a \cdot \overline{ba}$. *Determinaţi cifrele a şi b.*

(N. Grigorescu – G.M. nr 2 – 3/1982)

Rezolvare. Avem $\overline{aaa} = a \cdot 111 = a \cdot 3 \cdot 3^7$. Deci a = 3 şi b = 7.

40.(G) *Se dă numărul* $A = \overline{3xx3x}$. *Să se găsească cifra x astfel încât numărul A să fie produs de numere consecutive.*

(R. Marinescu, G.M. nr 1/1982)

Rezolvare. Scriem $\overline{3xx3x} = 3(10010 + x \cdot 337) = 3(2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + x \cdot 337)$. Având pe 3 factor şi impunând ca numărul să aibă factori numere prime consecutive se deduce că $x = 0$.

41.(G) *Să se determine cifrele a şi b, ştiind că numărul* $N = \overline{abbabb}$ *, scris în baza 10, se descompune într-un produs de 6 factori primi consecutivi.*

(I. Indre – G. M. nr. 7/1977)

Rezolvare. $N = \overline{abb} \cdot 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13(100a + 11b)$. Pentru a = 2 şi b = 5, $N = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$.

42.(G) *Să se determine numerele naturale de 4 cifre a căror descompunere în factori primi este* $a^5 \cdot b^5$.

Rezolvare. $2^5 \cdot 3^5 = 7776$; $1^5 \cdot 5^5 = 3125$. Alte soluţii nu mai există deoarece numerele $2^5 \cdot 5^5$, 7^5 au deja mai mult de patru cifre.

Numere prime gemene

43.(L) *Pentru* n *impar şi* $n>1$, *numerele* n *şi* $n+2$ *sunt prime dacă şi numai dacă* $(n-1)!$ *nu se divide cu* n *şi nu se divide cu* $n+2$.

Rezolvare. Presupunem mai întâi că numerele n şi $n+2$ sunt prime. Rezultă atunci că n nu divide $(n-1)!$ şi $n+2$ nu divide $(n-1)!$ deoarece factorii primi ai produsului $(n-1)!$ sunt mai mici decât n.

Reciproc, să presupunem că pentru n impar şi $n>1$, numărul $(n-1)!$ nu se divide prin n şi nici prin $n+2$ şi vom arăta că n şi $n+2$ sunt prime. Dacă n este compus, atunci $n = ab$, $a>1$, $b>1$ şi $a \le n-1$, $b \le n-1$. Dacă $a \ne b$ atunci $n = ab \mid (n-1)!$. Dacă $a = b$, $n = a^2$ şi cum a este impar rezultă $a \ge 3$, deci $n = a^2 \ge 3a > 2a$. Aşadar $2a \le n-1$ şi astfel a şi $2a$ sunt factori diferiţi ai produsului $(n-1)!$. Deci $n = a^2 \mid (n-1)!$ contrar ipotezei.

Dacă $n+2$ este compus, $n+2 = ab$ cu a şi b numere întregi mai mari decât 1. Deoarece n este impar, numerele a şi b sunt impare şi mai mari sau egale cu 3. Avem deci $n+2 \ge 9$ şi apoi $a \le \frac{1}{3}(n+2) < \frac{1}{2}(n-1)$ şi deci $2a < n-1$. Analog $2b < n-1$. Dacă $a \ne b$, atunci a şi b sunt factori diferiţi ai produsului $(n-1)!$ şi $n = a \cdot b \mid (n-1)!$ contrar ipotezei. Dacă $a = b$ atunci a şi $2b$ sunt factori diferiţi ai produsului $(n-1)!$ şi $n+2 = ab \mid 2ab$ iar $2ab \mid (n-1)!$. Astfel $n+2 \mid (n-1)!$ contrar ipotezei.

44.(L) *Suma cuburilor a două numere prime gemene se divide cu 36, cu excepţia unui caz.*

Rezolvare. Dacă p şi $p+2$ sunt numere prime gemene, atunci:

$$p^3 + (p+2)^3 = (2p+2)(p^2+2p+4)$$

Dar numerele prime mai mari decât 3 pot fi doar de forma $6k+1$ sau $6k-1$. Deci $p = 6k-1$ şi înlocuind în relaţia de mai sus obţinem:

$$p^3+(p+2)^3=36k(12k^2+1)\ \vdots\ 36$$

Excepţie face perechea 3,5.

45.(L) *Numerele p şi $p+2$ sunt simultan prime dacă şi numai dacă are loc congruenţa:*

$$4[(p-1)!+1]+p\equiv 0 \pmod{p(p+2)}$$

(Teorema lui Clement)

Rezolvare. Fie p şi $p+2$ prime. Din teorema lui Wilson avem:

$$(p-1)!+1\equiv 0 \pmod{p} \qquad (1)$$

$$(p+1)!+1\equiv 0 \pmod{(p+2)} \qquad (2)$$

Înmulţind congruenţa (1) cu 4 şi adunând-o cu congruenţa $p\equiv 0 \pmod{p}$, obţinem:

$$4[(p-1)!+1]+p\equiv 0 \pmod{p} \qquad (3)$$

Adunând congruenţa (2) cu congruenţa $p(p+1)\equiv -p \pmod{(p+2)}$ şi simplificând cu $p+2$ obţinem:

$$p[(p-1)!+1]\equiv -1 \pmod{(p+2)}$$

Înmulţind aceasta cu 4 şi adunând-o cu congruenţa $p^2\equiv p^2 \pmod{(p+2)}$ obţinem:

$$4p[(p-1)!+1]+p^2\equiv p^2-4\equiv 0 \pmod{(p+2)}$$

De aici găsim:

$$p\{4[(p-1)+1]+p\}\equiv 0 \pmod{(p+2)}$$

Iar apoi prin simplificare cu p:

$$4[(p-1)!+1]+p\equiv 0 \pmod{(p+2)} \qquad (4)$$

Din (3) şi (4) rezultă congruenţa cerută.

Reciproc, dacă are loc congruenţa din enunţ, din ea rezultă (3) iar din aceasta (1) şi din reciproca teoremei lui Wilson rezultă p prim. Tot din congruenţa din enunţ rezultă (4) iar din aceasta (2) şi din reciproca teoremei lui Wilson deducem că $p+1$ este prim.

Numere prime în progresie aritmetică

46.(L) *Dacă n numere prime formează o progresie aritmetică, atunci raţia progresiei se divide prin fiecare număr prim* $p < n$.

(M. Contor)

Rezolvare. Fie $a,\ a + d,\ a + 2d,\ \ldots\ a + (n - 1)d$ cele n numere prime în progresie aritmetică şi p un număr prim cu $p < n$. Prin împărţirea la p a acestor numere prime vom obţine, într-o anumită ordine, resturile $1, 2, \ldots p - 1$ dacă $a \neq p$ sau resturile $0, 1, 2 \ldots p - 1$ dacă $a = p$. Deoarece numărul lor este mai mare decât numărul resturilor, cel puţin două din ele vor da acelaşi rest. Fie

$$a + id = q_1 p + r \text{ şi } a + jd = q_2 p + r \quad \text{cu } 0 \leq i < j \leq p - 1$$

De aici

$$(j - i)d = (q_2 - q_1)p = M_p \Rightarrow p \mid (j - i)d$$

Dar $j - i < p$ şi deci p nu divide $j - i$. Rămâne $p \mid d$.

47.(L) *Să se găsească o progresie aritmetică formată din 6 termeni, toate numere prime.*

Rezolvare. Raţia progresiei trebuie să se dividă cu toate numerele prime mai mici decât 6, (vezi problema **46**) deci prin 2, 3, 5 adică trebuie să se dividă prin 30. Avem de exemplu progresiile: 23, 53, 83, 113, 143, 173

11, 71, 131, 191, 251, 311

7, 37, 67, 107, 137, 167, 197, 227, 257.

48.(L) *Să se demonstreze că o progresie aritmetică infinită de numere naturale diferite nu poate avea toţi termenii numere prime*.

Rezolvare. Dacă r este raţia progresiei iar a_n este un termen oarecare, atunci $a_{m+n} = a_n + mr$.

Pentru $a_n > 1$ şi $m = a_n$ avem $a_{m+n} = a_n + a_n r = a_n(1 + r)$, de unde rezultă că a_{m+n} este compus fiindcă $r \geq 1$.

Şirul infinit al numerelor prime

49.(L) *Există o infinitate de numere prime de forma* $4k + 3$, $k \in \boldsymbol{N}$.

Rezolvare. Fie p un număr prim de forma $4k + 3$. Vom demonstra că există un alt număr prim p_1 de această formă cu $p_1 > p$. Într-adevăr, fie $x = 4p! - 1$ care este de forma $4k + 3$ deoarece $x = 4(p!-1)+3$.

Dacă x este prim, atunci $p_1 = x$.

Dacă x nu este prim atunci toţi factorii primi ai săi sunt mai mari decât p, deoarece în caz contrar obţinem o contradicţie (factorii mai mici decât p ar trebui să-l dividă pe 1). Mai mult, cel puţin unul dintre factorii primi ai lui x este de forma $4k + 3$ (dacă toţi factorii ar fi de forma $4k + 1$ atunci produsul lor, adică x, ar fi de forma $4k + 1$, ceea ce este fals).

50.(L) *Există o infinitate de numere prime de forma* $6k + 5$, $k \in \boldsymbol{N}$.

Rezolvare. Demonstraţia este analoagă cu cea a exerciţiului anterior.

51.(L) *Există o infinitate de numere prime de forma* $4k + 1$, $k \in \boldsymbol{N}$.

Rezolvare. Fie numărul $x = (n!)^2 + 1$ care este de forma $4k + 1$, pentru $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$. Dacă x nu este prim are toţi factorii primi mai mari decât n şi de forma $4k + 1$. Într-adevăr, dacă ar exista un factor prim $p = 4k + 3$ cu $p \mid x$, cum $x \mid (n!)^{2(2k+1)} + 1$, ar rezulta că şi $p \mid (n!)^{2(2k+1)} + 1$, adică $p \mid (n!)^{p-1} + 1$. Deci $p \mid (n!)^p + n!$. Dar de aici şi din faptul că $p \mid (n!)^p - n!$ (conform teoremei lui Fermat) rezultă că $p \mid 2n!$ ceea ce e fals deoarece p este factor prim mai mare decât n.

Deci, pentru orice număr prim p de forma $4k + 1$, există un număr prim p_1 de aceeaşi formă, cu $p_1 > p$, fiindcă sau $(p!)^2 + 1$ este prim şi atunci $p_1 = (p!)^2 + 1$ > sau are un factor prim p_1 de forma $4k + 1$ cu $p_1 > p$.

Utilizarea postulatului lui Bertrand

52.(L) *Să se demonstreze că* $p_n < 2^n$ *pentru* $n > 1$ *unde* p_n *este al n – lea număr prim din şirul numerelor naturale.*

Rezolvare. Conform postulatului lui Bertrand avem $p_k < p_{k+1} < 2p_k$ pentru $k \in \mathbf{N}$. Deci $p_2 < 2p_1$, $p_3 < 2p_2$ . . . $p_n < 2p_{n-1}$, inegalităţi care prin înmulţire membru cu membru dau $p_n < 2^{n-1} p_1 = 2^n$.

53.(L) *Să se demonstreze că* $p_n^2 < 2^n$ *pentru* $n \geq 10$.

Rezolvare. Demonstraţia se face prin inducţie. Pentru $n = 10$, $p_{10} = 29$ şi $29^2 < 2^{10}$ şi exerciţiul se verifică. Presupunem relaţia din enunţ, adevărată prin orice k, cu $10 < k \leq n$ şi o demonstrăm pentru $n + 1$. Utilizând teorema care afirmă că între m şi $2m$ ($m > 5$ întreg) există cel puţin două numere prime, găsim că $p_{n-1} < p_n < p_{n+1} < 2p_{n-1}$. Deci, $p_{n+1}^2 < 4p_{n-1}^2 < 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$.

Teoremele lui Fermat, Euler, Wilson

54.(L) *Fie* p *prim şi* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *întregi. Să se demonstreze că:*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^p \equiv (a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p) \pmod{p}$$

iar de aici să se deducă teorema lui Fermat.

Rezolvare. Din binomul lui Newton şi din $p \mid C_p^i$ pentru $i = \overline{1, p-1}$, obţinem:

$$(a_1 + a_2)^p = a_1^p + C_p^1 a_1^{p-1} a_2 + \ldots + C_p^{p-1} a_1 a_2^{p-1} + a_2^p \equiv (a_1^p + a_2^p) \pmod{p}$$

$$(a_1 + a_2 + a_3)^p \equiv (a_1 + a_2)^p + a_3^p \equiv (a_1^p + a_2^p + a_3^p) \pmod{p}$$

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^p \equiv (a_1 + a_2 + a_3)^p + a_4^p \equiv (a_1^p + a_2^p + a_3^p + a_4^p) \pmod{p}$$

……..

Luând apoi $a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_n = 1$, obţinem teorema lui Fermat.

55.(L) *Să se demonstreze că teoremele lui Femat şi Wilson sunt echivalente cu următoarea teoremă:*

Dacă p este un număr prim şi a un număr întreg, atunci (p – 1)! a^p + a se divide la p.

(I. Moser)

Rezolvare. Arătăm mai întâi că din teoremele lui Fermat şi Wilson rezultă teorema din enunţ. Astfel, dacă p este prim şi a întreg arbitrar, din teorema lui Wilson rezultă că $(p-1)!a^p + a^p \equiv 0 \pmod p$, iar din teorema lui Fermat că $a^p - a \equiv 0 \pmod p$ adică relaţia din enunţ.

Reciproc, luând în teorema din enunţ a = 1, obţinem teorema lui Wilson. De aici obţinem $(p-1)!a^p + a^p \equiv 0 \pmod p$ iar din aceasta scăzând relaţia din teorema din enunţ, obţinem teorema lui Fermat.

56.(L) *Teoremele lui Fermat şi Wilson sunt echivalente cu următoarea teoremă:*

Dacă p este un număr prim, atunci pentru orice număr întreg a, numărul a^p + (p – 1)!a se divide la p.

Rezolvare. Demonstraţie analogă cu cea a exerciţiului precedent.

57. (L) *Dacă p este prim şi p > 3 atunci $a^p - a \equiv 0 \pmod{6p}$.*

Rezolvare. Avem $6 \mid (a-1)a(a+1)$ şi $(a-1)a(a+1) \mid a^p - a$ iar din teorema lui Fermat $p \mid a^p - a$. Cum p > 3 avem (p, 6) = 1 şi din relaţiile precedente obţinem $6p \mid a^p - a$.

58.(L) *Ştiind că suma a două numere naturale nenule a şi b este un număr prim, să se afle restul împărţirii numărului $a^b b^a$ prin a + b.*

Rezolvare. Presupunem a < b şi fie p = a + b. Din binomul lui Newton şi teorema lui Fermat, deducem:

$$a^b b^a = a^b (p-a)^a = a^b [M_p + (-1)^a a^a] = M_p + (-1)^a a^p = M_p + (-1)^a a$$

Deci $a^b b^a = M_p + a$ pentru a număr par şi $a^b b^a = M_p + b$ pentru a număr impar. Astfel, restul împărţirii lui $a^b b^a$ prin a + b este a sau b.

59. (L) *Dacă p şi q sunt două numere prime distincte şi $a^p \equiv b^p \pmod p$ şi $a^q \equiv b^q \pmod q$ atunci $a \equiv b \pmod{pq}$*

Rezolvare. Din teorema lui Fermat avem $a^p \equiv a \pmod p$ şi $b^p \equiv b \pmod p$ şi folosind condiţia din enunţ obţinem $a \equiv b \pmod p$. Analog obţinem $a \equiv b \pmod q$. Cum $(p,q) = 1$, rezultă $a \equiv b \pmod{pq}$

60.(L) *Dacă p este prim şi $a^{p-1} + b^{p-1} \equiv 0 \pmod p$, atunci $a^{p-1} + b^{p-1} \equiv 0 \pmod{p^{p-1}}$*

Rezolvare. Dacă $(a,p) = 1$ din condţia din enunţ rezultă $(b,p) = 1$ şi din teorema lui Fermat $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ şi $b^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, de unde $a^{p-1} + b^{p-1} \equiv 2 \pmod p$ obţinem că $2 \equiv 0 \pmod p$, deci $p = 2$ care verfică relaţia cerută.

Dacă $p \mid a$ atunci $p \mid b$ şi $a^{p-1} = M_{p^{p-1}}$ şi $b^{p-1} = M_{p^{p-1}}$, deci $a^{p-1} + b^{p-1} = M_{p^{p-1}}$.

61. (L) *Dacă p este prim şi p mai mare decât 5 atunci orice număr format din $p - 1$ cifre egale se divide cu p.*

Rezolvare. Fie $N = \underbrace{aa.....a}_{dep-1ori} = a \cdot \underbrace{11.....1}_{dep-1ori} = a(10^{p-2} + 10^{p-3} + \ldots + 10 + 1)$,

$9N = a(10 - 1)(10^{p-2} + 10^{p-3} + \ldots + 10 + 1) = a(10^{p-1} - 1)$. Cum p este prim şi $p > 5$, atunci $(p,10) = 1$ şi conform teoremei lui Fermat $10^{p-1} - 1 = M_p$. Deci $p \mid 9N$ de un de $p \mid N$.

62.(L) *Să se arate că dacă p este un număr prim impar şi $a^p + b^p = M_p$, atunci $a^p + b^p = M_{p^2}$.*

Rezolvare. Notă $a + b = c$ şi ridicăm la puterea p după binomul lui Newton:

$C^p = (a + b)^p = a^p + C_p^1 a^{p-1} b + \ldots + C_p^i a^{p-i} b^i + \ldots + C_p^{p-1} a\, b^{p-1} + b^p$.

Prin ipoteză $p \mid a^p + b^p$ iar $p \mid C_p^i$ pentru $i = \overline{1, p-1}$ deoarece p este prim. Rezultă $p \mid C^p$ de unde $p \mid C$. Deci $C = mp$ şi deci $a = mp - b$ de unde $a^p = (mp - b)^p = M_{p^2} - b^p$ şi astfel $a^p + b^p = M_{p^2}$.

Bibliografie

[1] Acu, D., *Aritmetica şi teoria numerelor*, Editura Universităţii ”Lucian Blaga”, Sibiu, 1999

[2] Buşneag, D., Boboc, F., Piciu, D., *Aritmetica şi teoria numerelor,* Editura Universitaria, Craiova, 1999

[3] Cucurezeanu, I., *Probleme de aritmetică şi teoria numerelor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1976

[4] Dăncilă, I., *Divizibilitatea numerelor,* Editura Sigma, Bucureşti, 2001

[5] Sierpinski, W., *Ce ştim şi ce nu ştim despre numerele prime,* Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1966

[6] Ţelinoiu, P., *Culegere de exerciţii şi probleme de aritmetică,* Editura Porto-Franco, Galaţi, 1991

[7] Colecția *Gazeta Matematică*